DOWNLOAD

Matthias Römer · Karl Charon

Mathematik in Lernumgebungen: Die Mitte finden

Geometrische Konstruktion, Schwerpunkt, Maßstab – mit vernetzten Aufgaben eigenverantwortlich lernen

Downloadauszug aus dem Originaltitel:

AOL verlag

Vorwort

Sinnvoller Einsatz – didaktischer und methodischer Rahmen

Mit Lernumgebungen zu arbeiten bedeutet, den Kindern zu vertrauen. Vertrauen, dass jeder ein wenig Mathematik mitnimmt; vertrauen, dass es nicht tragisch ist, wenn jeder am Ende einer Stunde an einer anderen Stelle angekommen ist; vertrauen, dass es nicht ein Ergebnis gibt, das es herauszufinden gilt, sondern vielleicht 25 verschiedene Ergebnisse.

Lernumgebungen erfordern auf der anderen Seite aber auch den vollen Einsatz der Lehrkraft, denn jeder Schüler oder jede Gruppe ist an einer anderen Stelle, auf einem anderen Weg und bei einem anderen Problem. Das bedeutet, sowohl beratend als auch diagnostisch tätig zu sein und dies alles auf einer sehr individuellen Ebene, die versucht, jedem Schüler beim Betreiben von Mathematik gerecht zu werden. Das muss nicht immer funktionieren, darauf müssen Sie vorbereitet sein. Eine wichtige Voraussetzung ist aber in jedem Fall, dass das Unterrichtsarrangement so gestaltet ist, dass den Schülern ein möglichst guter Rahmen zur selbstständigen Tätigkeit geboten wird.

Lernumgebungen sind normalerweise für eine Doppelstunde konzipiert und können gut in einen kooperativen methodischen Rahmen eingebunden werden. Eine Anreicherung mit zusätzlichem Material kann in einigen Fällen sinnvoll sein und die Kopiervorlagen gut ergänzen. Es ist nicht immer notwendig, eine Lernumgebung passend zu einer gerade behandelten Thematik einzusetzen. Vielmehr ist es auch möglich, die Lernumgebungen als vernetzendes, wiederholendes Element zu verwenden, um die Sinnhaftigkeit von Mathematik an vielen Stellen zu verdeutlichen. Gleichzeitig greift man damit auf mathematische Themengebiete zurück, die bereits behandelt wurden, und aktiviert so vorhandenes Wissen bei den Schülern.

Im Sinne einer optimalen Nutzung der natürlichen Differenzierung, die in den Aufgaben steckt, sollte man nicht alle Lernenden alle Aufgaben bearbeiten lassen, sondern nach der einführenden Aufgabe die Schüler – eventuell nach einer Beratung durch die Lehrperson – über ihr weiteres Vorgehen entscheiden lassen. Natürlich ist auch die Einbindung von Lernumgebungen in Wochenpläne oder Freiarbeit möglich und sinnvoll.

Problemlos kann man auch einzelne Aufgaben aus einer Lernumgebung herauslösen und diese einzeln bearbeiten lassen. Viele der Aufgaben beinhalten in sich auch eine natürliche Differenzierung und damit eine steigende Progression hinsichtlich der kognitiven Tätigkeit.

In der Praxis bereits bewährt haben sich die Lernumgebungen als Aufgaben für ein regelmäßig geführtes Lerntagebuch oder auch als Langzeitaufgabe, bei der dem Schüler immer wieder eine dezidierte Rückmeldung zu seinen individuellen Fortschritten gegeben wird. Gerade hierbei kommt das Prinzip der natürlichen Differenzierung zu seiner vollen Entfaltung. So eingesetzt kann der vernetzende Charakter wiederum wertvolle Beiträge zum Wiederholen und Üben leisten.

Eine reflektierende und individuelle Unterstützung ist bei Lernumgebungen besonders ertragreich und unterstützt den Lernprozess deutlich. Diese müssen nicht unbedingt umfangreich, sondern sollten eher pointiert sein und den Lernprozess des einzelnen Schülers kurz in den Blick nehmen.

Aufbau des Buches

Jeder Lernumgebung ist ein ausführlicher Kommentar zugeordnet, der nicht nur eine Einordnung in allgemeine didaktische Prinzipien, in grundlegende Zielsetzungen von Mathematikunterricht, Kategorisierungen der Aufgaben nach Leitideen und Kompetenzbereichen sowie Anforderungsniveaus enthält, sondern natürlich auch die Lösungen zu den Aufgaben. Darüber hinaus finden Sie in vielen Fällen zusätzliche Internetlinks oder Literaturtipps, die ein weiteres Einlesen in das Thema ermöglichen oder eventuell an der einen oder anderen Stelle aktuellere Informationen liefern. Am Ende des Buches befinden sich Kopiervorlagen, die für einige der Lernumgebungen benötigt werden.

Wir haben versucht, die mathematischen Themen in Stichworten festzuhalten, die in der Lernumgebung schwerpunktmäßig vertreten sind. Es wäre gegen die Natur einer Lernumgebung, wenn diese Aufzählung als vollständig bezeichnet würde. Dennoch gibt sie einen guten Überblick und erleichtert die Auswahl zu bestimmten Zeitpunkten im Schuljahr.

Der nun vorliegende Band für die Klassenstufen 7 und 8 greift erneut eine Reihe von Umweltsituationen und mathematischen Situationen auf, um sie in Lernumgebungen zu entdecken, zu bearbeiten und zu diskutieren. Wir hoffen, eine spannende und anspruchsvolle Zusammenstellung interessanter Themen für Ihren Unterricht vorbereitet zu haben, die es Ihnen ermöglicht, motivierend, differenziert und kooperativ Mathematik zu unterrichten.

Wir wünschen Ihnen und insbesondere Ihren Schülern viel Spaß mit den Lernumgebungen und einen ertragreichen Mathematikunterricht. Wir freuen uns über Anregungen und Fragen zu unseren Ideen, die Sie gern an uns senden dürfen (matthiasroemer@gmx.de oder karlcharon@gmx.de).

K. Charon

Karl Charon

Matthias Römer

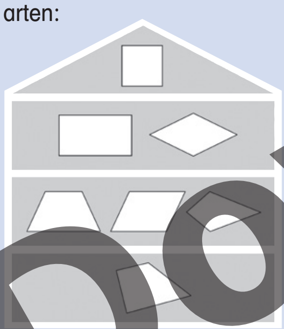
Die Mitte finden

(gemeinfrei)

Dass eine Fläche nicht unbedingt nur einen Mittelpunkt hat, wird deutlich, wenn man nach dem Mittelpunkt Deutschlands fragt. Denn diesen Titel beanspruchen mehrere Gemeinden gleichzeitig für sich. Sowohl die Gemeinde Niederdorla in Thüringen als auch die Gemeinde Krebeck in Niedersachsen haben sich entsprechende Gedenktafeln anfertigen lassen, die bestätigen, dass der Mittelpunkt Deutschlands auf ihrem Gebiet liegt.

1 Die Tatsache, dass sich die beiden oben genannten Orte zu Recht als Mittelpunkt Deutschlands bezeichnen dürfen, hängt damit zusammen, dass es keine eindeutige Festlegung für den Mittelpunkt einer Fläche gibt. Es kommt darauf an, nach welchen Kriterien man den Mittelpunkt bestimmt.

Das „Haus der Vierecke“ gibt eine gute Übersicht über die verschiedenen Vierecksarten:



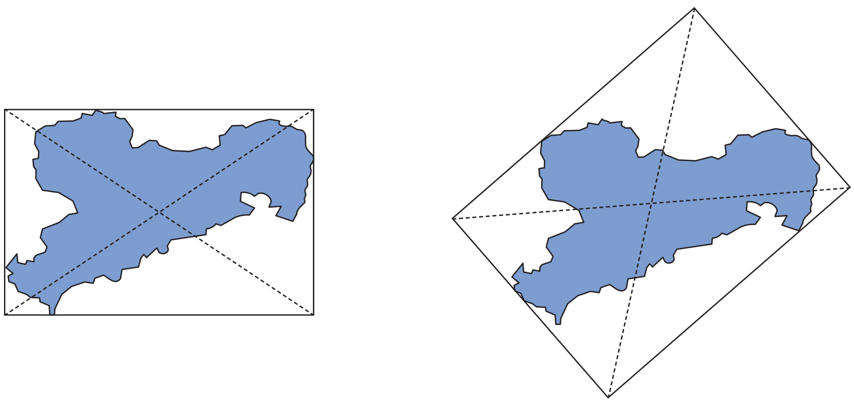
a) Zeichne mehrere regelmäßige und unregelmäßige Vierecke. Bei welchen fällt es dir leicht, einen Punkt als Mittelpunkt zu bezeichnen? Beschreibe, wie du vorgehst, um diesen zu finden.

b) Bei welchen geometrischen Figuren kann man von einem eindeutigen Mittelpunkt sprechen? Wie hängt dies mit der Symmetrie der Figuren zusammen?

c) Ein Mitschüler behauptet, der Mittelpunkt eines Vierecks sei der Schnittpunkt der Diagonalen. Gib Vierecksarten an, für die das so festgelegt werden kann. Bei welchen Vierecken liegt dieser Punkt nach deiner Einschätzung eher nicht in der Mitte?

d) Zeichne dir mit einem runden Gegenstand (z. B. einer CD) einen Kreis. Beschreibe, wie du vorgehst, um den Mittelpunkt zu finden.

2 Da Länder unregelmäßige Formen haben, nutzen Geografen Rechtecke, um die Mitte von Ländern auf einer Karte zu bestimmen. Als Mitte des Rechtecks wird dann der Schnittpunkt der Diagonalen verwendet. Das Beispiel zeigt die Methode an der Silhouette Sachsens.



a) Suche dir aus der Kopiervorlage die Silhouette deines Bundeslandes heraus. Zeichne ein Rechteck, das die Silhouette genau einschließt und parallel zu den Papierkanten verläuft. Entspricht der Schnittpunkt der Diagonalen dem Punkt, den du als Mittelpunkt angeben würdest?

b) Drehe nun das Rechteck aus Teil a) um 45°. Ermittle den neuen Mittelpunkt deines Bundeslandes. Schätze, wie viele Kilometer die beiden Orte voneinander entfernt sind.

c) Anstelle von Rechtecken, die das Land einschließen, kann man auch Rechtecke betrachten, die ganz im Land liegen. Findest du damit einen Punkt, der als Mittelpunkt akzeptabel ist?

d) Konstruiere auch mithilfe anderer geometrischer Formen, die einen eindeutigen Mittelpunkt haben (z. B. der Kreis), die Mitte deines Bundeslandes. Vergleiche diese Punkte mit den Punkten aus den vorhergehenden Aufgabenteilen.

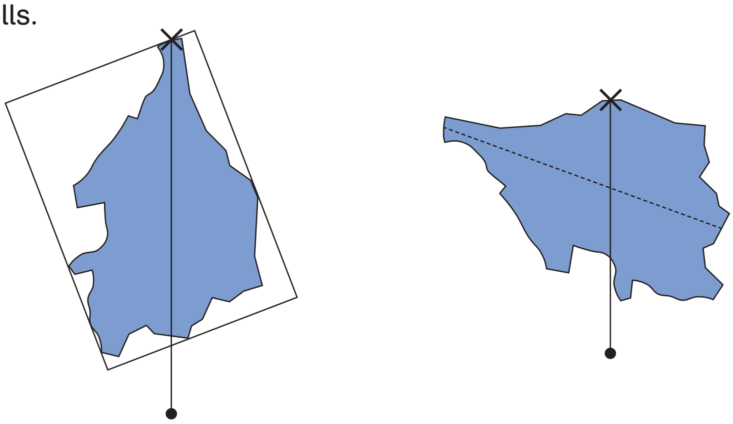
> Den Schwerpunkt einer Fläche kann man praktisch ermitteln, indem man die Fläche aus Karton ausschneidet und sie auf einer Spitze balanciert.

3 Eine saarländische Brauerei hat zu Werbezwecken einen Bierdeckel in der Form des Saarlandes drucken lassen. Ein solcher Bierdeckel eignet sich sehr gut, um mithilfe der Schwerpunktmethode den Punkt zu finden, der als Mittelpunkt des Landes gelten könnte.

© Zwickel-Bierdeckel

a) Verwende ein Stück Pappe und die Kopiervorlage, um ein stabiles Modell deines Bundeslandes zu erstellen. Nutze dein Modell, um den Schwerpunkt der Fläche zu finden.

b) Die Abbildung unten zeigt, wie man mithilfe einer Schnur und eines kleinen Gewichts den Schwerpunkt einer Fläche bestimmen kann. Erkläre die Vorgehensweise. Ermittle so den Schwerpunkt deines Modells.



c) Recherchiere nun die Umrisse des Landes Kroatien. Erkläre, warum der Punkt, den man mit dieser Methode ermittelt, für das Aufstellen einer Gedenktafel nicht geeignet ist. Suche nach weiteren Ländern, für die sich mit dieser Methode ebenso nur schwer ein geeigneter Mittelpunkt finden lässt.

Die Mitte finden

Allgemeines zum Gegenstand der Lernumgebung

Wenn sich eine Gemeinde mit dem Titel schmücken darf, Mittelpunkt des Landes zu sein, bedeutet das nicht zuletzt touristisch ein gewisses Renommee. In Deutschland beanspruchen auf der Grundlage unterschiedlicher Berechnungsmethoden mehrere Gemeinden diesen Titel. Dabei wird mal die Zwölf-Meilen-Zone vor der Küste zum Staatsgebiet hinzugenommen, mal werden Gebirge bei der Berechnung des Schwerpunktes stärker gewichtet und die Berechnung an einem 3-D-Modell vorgenommen.

Eine andere Art der Gewichtung nutzt man bei der Ermittlung des Bevölkerungsschwerpunktes. Hierbei wird das Land mit der Bevölkerungsdichte gewichtet. Ein gutes Beispiel hierfür ist Richmond als Bevölkerungsmittelpunkt Kanadas. Dieser Ort weicht sehr stark von den rein geometrisch ermittelten Mittelpunkten des Landes ab.

Didaktische Anmerkungen

In der Geometrie hat die Bezeichnung „Mittelpunkt“ für eine Fläche nur bedingt eine sinnvolle Bedeutung. Spricht man vom Mittelpunkt einer Fläche, so sind Vereinbarungen darüber notwendig, nach welchen Kriterien dieser ermittelt werden soll. Das Überprüfen der Tauglichkeit solcher Kriterien, durch den Vergleich unterschiedlicher konkreter Konstruktionen, bildet den Schwerpunkt dieser Lernumgebung. Neben den Berechnungen anhand eines Vierecks kann ebenso das Wissen über die besonderen Punkte im Dreieck herangezogen werden, um die Lernumgebung zu bearbeiten. Oder die Lernumgebung wird genutzt, um dieses Thema vorzubereiten und grundlegende Ideen in diesem Zusammenhang anzudeuten.

Grundlegende Ziele

Die Aufgaben dieser Lernumgebung basieren in erster Linie auf der Leitidee „Raum und Form“. Insgesamt sind es eher einfache Konstruktionsaufgaben, die Anlass geben, mithilfe von Fertigkeiten im geometrischen Bereich explorativ Problemstellungen zu untersuchen. Dabei geht es auch darum, die Bedeutung des Begriffs Mittelpunkt für Flächen zu hinterfragen und eigene mathematische Argumentationen zu entwickeln, wie dieser ermittelt werden kann. Überlegungen zur Genauigkeit spielen in allen Aufgaben implizit eine Rolle.

Einordnung der Aufgaben

Aufgabe	Kompetenzbereich	Leitidee	Anforderungsbereich
1. a)	K1, K4	L3	I
1. b)	K1	L3	I
1. c)	K1	L3, L2	I
1. d)	K4	L3	I
2. a)	K1, K4	L3	I
2. b)	K4, K5	L3, L2	II
2. c)	K1	L3	I
2. d)	K4	L3	I
3. a)	K2	L3	I
3. b)	K2	L3	I
3. c)	K1	L3	II

Zu den Aufgaben & Lösungen

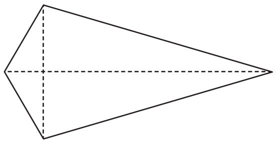
1 In dieser Aufgabe soll aufgezeigt werden, dass es in der Regel einer Vereinbarung bedarf, die festlegt, was gemeint ist, wenn man von „dem“ Mittelpunkt einer Fläche spricht. Ausnahmen bilden Kreise, regelmäßige Polygone und andere mehrfach symmetrische Figuren, wie das Rechteck oder die Raute.

a) Als Möglichkeit, um für die unterschiedlichen Vierecke einen Mittelpunkt festzulegen, bietet sich der Schnittpunkt der Diagonalen oder der Schnittpunkt der Verbindungsstrecken gegenüberliegender Seitenmitten an. Für Quadrat, Rechteck, Raute und Parallelogramm führen beide Methoden zum selben Punkt.
Eine andere Möglichkeit – soweit die Abbildung das zulässt – ist das Anlegen eines Umkreises oder Inkreises, um dann den jeweiligen Mittelpunkt als Flächenmitte festzulegen.

b) Bei Kreisen und regelmäßigen Polygonen kann man von eindeutigen Mittelpunkten sprechen. Sie weisen eine mehrfache Drehsymmetrie auf. Ihre Symmetrieachsen schneiden sich in einem Punkt.

c) Für Quadrat, Rechteck, Raute und Parallelogramm ist dies eine sinnvolle Festlegung. Bei

Drachen und Trapezen oder beliebigen Vierecken ist diese Festlegung unter Umständen ungünstig.



d) Schneidet man den Kreis aus, so kann man durch Falten zwei Symmetrieachsen finden. Geometrisch konstruieren lässt sich der Mittelpunkt eines Kreises, indem man z. B. drei verschiedene Punkte darauf festlegt und den Umkreismittelpunkt des so entstandenen Dreiecks konstruiert.

2 **a)** Je nach der Form des Landes kann der so gefundene Punkt, wie im Beispiel Sachsens, als weniger geeignet erscheinen. Hier liegt der Punkt recht nahe an einer der Landesgrenzen. Das Gefühl für die richtige Lage des Mittelpunktes orientiert sich eher am Schwerpunkt der Fläche, welcher in Aufgabe 3 betrachtet wird.

b) Im Beispiel Sachsens beträgt die Entfernung zwischen den beiden Orten ca. 20 km.

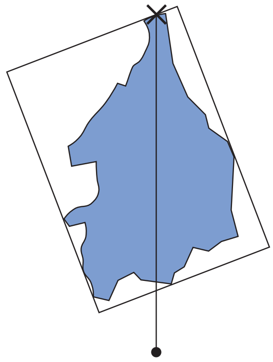
c) Die Wahl eines Rechtecks, das ganz innerhalb der Landesgrenzen liegt, ist willkürlich. Hier können sehr unterschiedliche Ergebnisse erzielt werden. Eine solche Vorgehensweise ist nicht praxistauglich.

d) individuelle Lösungen

3 Für die Bearbeitung dieser Aufgabe werden Pappe, eine Nähnadel und ein Faden sowie ein kleines Gewicht benötigt, das man an dem Faden befestigen kann

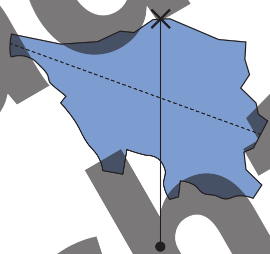
a) Beim Ausbalancieren der Fläche auf einer Nähnadel sollte darauf geachtet werden, dass die Nadel nicht zu weit in die Pappe gestochen wird, damit sich die Pappe noch möglichst frei ausrichten kann.

b) Wird die Fläche mithilfe einer Nadel frei schwingend aufgehängt, so pendelt sie sich bezüglich des Aufhängepunktes im Gleichgewicht ein. Die Schnur mit dem Gewicht richtet sich dann entlang einer Schwerelinie der Figur aus.



Diese zeichnet man auf der Fläche nach.

Sticht man nun die Nadel an einer anderen Stelle ein, erhält man eine zweite Schwerelinie.



Der Schnittpunkt der beiden Schwerelinien ist der Schwerpunkt der Fläche.

c) Der Schwerpunkt, den man für die Fläche Kroatiens anhand der in Teil b) vorgestellten Methode erhält, liegt außerhalb der Landesgrenze. Eine weitere Schwierigkeit stellen die vielen Inseln Kroatiens dar. Ähnliche Probleme bestehen bei Ländern wie Kanada, Vietnam oder Indonesien. Die Frage nach dem Mittelpunkt Russlands kann als Anlass zur Diskussion genutzt werden, inwiefern Karten als mehr oder weniger gute Projektionen von Ausschnitten einer (angenäherten) Kugeloberfläche geeignet sind.
Länder mit hohen Gebirgen können die Frage nach der Einbeziehung des Reliefs aufwerfen.

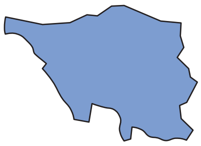
Literatur

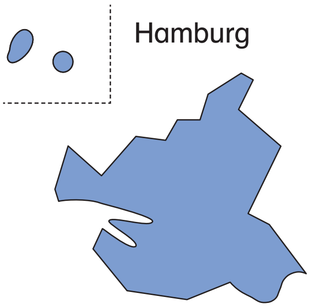
Einen hervorragenden Artikel zum Thema „Mittelpunkt Deutschlands“ hat der Geograf Christian Hanewinkel veröffentlicht: Abgerufen am 15.06.2016 von http://aktuell.nationalatlas.de/mittelpunkte-7_07-2012-0-html/

Michael Moll, ein selbst ernannter Weltenbummler, hat auf seiner Seite viele Bilder verschiedener Ländermittelpunkte gesammelt: Abgerufen am 15.06.2016 von http://www.dieweltenbummler.de/geografische-mittelpunkte/

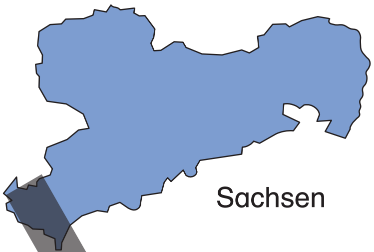
Kopiervorlage: Die Mitte finden

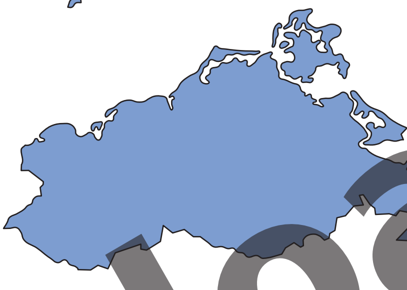
(Bundesländer sind nicht im gleichen Maßstab abgebildet.)

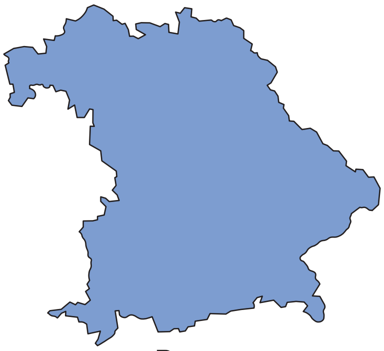

Saarland


Hamburg

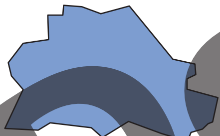

Hessen


Sachsen


Mecklenburg-Vorpommern

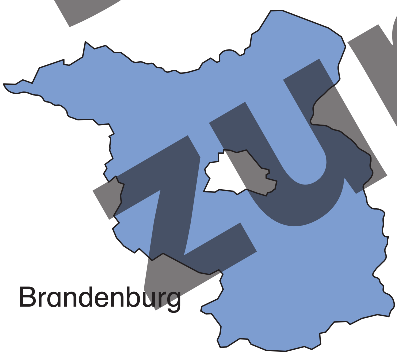

Bayern

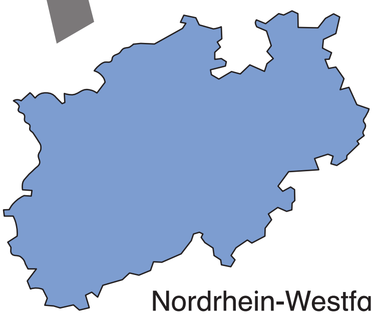

Schleswig-Holstein

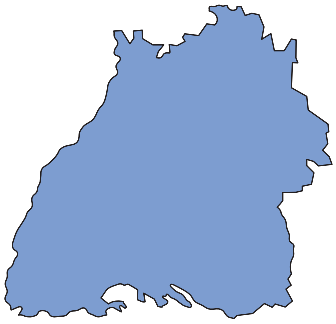

Berlin

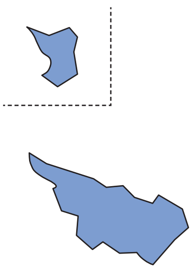

Niedersachsen


Thüringen

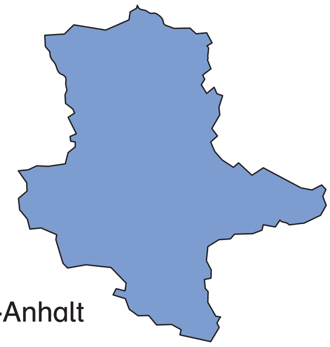

Brandenburg


Nordrhein-Westfalen


Baden-Württemberg


Bremen


Rheinland-Pfalz


Sachsen-Anhalt

Bildnachweis:

Cover: © maurogrigollo – Fotolia.com
Seite 2: © The original uploader was Damaster at German Wikipedia, gemeinfrei
Seite 3: © Zwickel Bierdeckel

Bilder, die nicht aufgeführt sind, stammen von den Autoren.

Impressum

Mathematik erleben in Lernumgebungen – Klasse 7/8

Matthias Römer ist seit fast 20 Jahren Lehrer an Gesamt- und Gemeinschaftsschulen für Mathematik und Sozialkunde. Neben seiner Tätigkeit in der Schule führt er am Landesinstitut für Pädagogik und Medien Fortbildungen für Mathematiklehrerinnen und -lehrer durch und ist mit einem Teil seiner Arbeitszeit an die Universität des Saarlandes, Lehrstuhl für Mathematik und ihre Didaktik abgeordnet. Er hat einen Sohn.

Karl Charon ist seit zehn Jahren Lehrer an Gesamt- und Gemeinschaftsschulen für Mathematik und Physik. Davor schloss er eine Berufsausbildung zum Tischler ab und arbeitete als freiberuflicher Perkussionist. Zurzeit ist er mit sechs Stunden abgeordnet an den Lehrstuhl für Mathematik und ihre Didaktik, Universität des Saarlandes. Er ist Vater von zwei Söhnen.

Veritaskai 3 · 21079 Hamburg
Fon (040) 32 50 83-060 · Fax (040) 32 50 83-050
info@aol-verlag.de · www.aol-verlag.de

Redaktion: Janina Zielecki
Layout/Satz: Satzpunkt Ursula Ewert GmbH, Bayreuth
Illustrationen: Satzpunkt Ursula Ewert GmbH, Bayreuth

Bestellnr.: 10358DA4